موسسه تدریس خصوصی

مدرسین تهران

- تدریس خصوصی دروس دانشگاهی: مقاطع دکتری، کارشناسی ارشد، کارشناسی
- آموزش نرم‌افزارهای تخصصی: تمامی رشته های مهندسی
- ترجمه متون تخصصی: تمامی رشته های دانشگاهی
- با همکاری اساتید دانشگاه ها: خانم و آقا

۰۲۱-۷۷۴۹۹۹۲۵

۰۹۲۱-۲۰۲۸۲۹۵

Modaresine Tehran

: آدرس سایت www.ModaresineTehran.com

:پست الکترونیک ModaresineTehran@gmail.com

:کانال تلگرام تهران مرکز @Iranian_Academics

بسمه تعالی

دانشکده علوم مهندسی　　مدرس　　نام درس: معادلات دیفرانسیل
تاریخ آزمون: ۱۳۹۶/۳/۲۵　　ساعت آزمون: ۸　　مدت آزمون: ۱۰۰ دقیقه
پردیس دانشکده های فنی　　نیمسال دوم　　سال تحصیلی ۱۳۹۶ ۱۳۹۵　　استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست
دانشگاه تهران

ردیف　نام و نام خانوادگی دانشجو: مازیار زمانی‌پور　　شماره دانشجویی　　نمره

۱ جواب معادله دیفرانسیل زیر را به روش سریها، در نزدیکی $x_0 = 0$ بدست آورید. ۲۵

$$xy'' + 2y' + xy = 0 \quad ; \quad x > 0$$

۲ جواب مساله مقدار اولیه زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس بدست آورید. منظور از u تابع پله‌ای و δ تابع دلتای دیراک می‌باشد. ۲۵

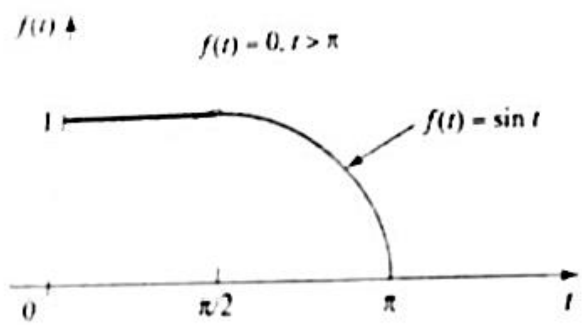
$$2y'' + 10y = 3u_{12}(t) - 5\delta(t-4) \ ; \ y(0) = -1 \ ; \ y'(0) = -2$$

۳ الف. لاپلاس معکوس زیر را بدست آورید: ۱۵

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-2s}Ln\left(\frac{s}{s-1}\right)\right)$$

$$e^{-2s} \ Ln\left(1+\frac{1}{s-1}\right)$$

ب. ابتدا $f(t)$ را بر حسب تابع پله‌ای نوشته و سپس تبدیل لاپلاس آن را بدست آورید. ۱۰



۴ دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل نمائید. ۲۵

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} te^{2t} \\ te^{-2t} \end{pmatrix}$$

-۱

$$xy''+2y'+xy=0$$

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=0$$

$$P(x)=\frac{2}{x} \qquad P_0=\lim_{x\to 0} xP(x)=\lim_{x\to 0} x\times\frac{2}{x}=2$$

$$q(x)=1 \qquad q_0=\lim_{x\to 0} x^2 q(x)=\lim_{x\to 0} x^2=0$$

معادله مشخصه: $r(r-1)+P_0 r+q_0=0 \Rightarrow r(r-1)+2r=0$

$$\Rightarrow r^2+r=0 \Rightarrow \begin{cases} r=0 \\ r=-1 \end{cases}$$

$$y_1=x^0\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$y_1'=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(n)x^{n-1} \rightarrow y_1''=\sum_{n=2}^{+\infty} a_n(n)(n-1)x^{n-2}$$

با جایگذاری در معادله فوق داریم:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n(n)(n-1)x^{n-1}+2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(n)x^{n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}=0$$

حال توان ها را یکی می کنیم:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^{n+1}+\sum_{n=-1}^{+\infty} a_{n+2}(n+2)x^{n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}=0$$

$$\boxed{a_1 = 0}$$

$$\left[(n+2)(n+1) + (n+2)\right] a_{n+2} + a_n = 0$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)^2}$$

$$n=0 \rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{2^2}$$

$$n=2 \rightarrow a_4 = \frac{-a_2}{4^2} = (-1)^2 \frac{a_0}{2^2 \times 4^2} = \frac{(-1)^2 a_0}{2^2(1^2 \times 2^2)}$$

$$n=4 \rightarrow a_6 = \frac{-a_4}{6^2} = \frac{(-1)^3 a_0}{2^2(1^2 \times 2^2 \times 3^2)}$$

$$\vdots$$

$$n=2k-2 \rightarrow a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^2(1^2 \times 2^2 \times \dots \times k^2)} = \frac{(-1)^k a_0}{4 \times (k!)^2}$$

$$n=1 \rightarrow a_3 = \frac{-a_1}{3^2} = 0$$

$$n=3 \rightarrow a_5 = -\frac{a_3}{5^2} = 0$$

$$\vdots$$

$$\boxed{a_{2k+1} = 0}$$

$$y_2 = \alpha y_1 \ln|x| + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

-۲

$$2y'' + 10y = 3u_{12}(t) - 5\delta(t-4) \qquad y(0) = -1$$
$$y'(0) = -2$$

$$2\mathcal{L}(y'') + 10\mathcal{L}(y) = 3\mathcal{L}(u_{12}(t)) - 5\mathcal{L}(\delta(t-4))$$

$$\Rightarrow 2(s^2\mathcal{L} - s\times(-1) + 2) + 10\mathcal{L} = 3\frac{e^{-12s}}{s} - 5e^{-4s}$$

$$\Rightarrow 2(s^2+5)\mathcal{L} = -s - 2 + 3\frac{e^{-12s}}{s} - 5e^{-4s}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{-s}{2(s^2+5)} - \frac{1}{s^2+5} + \frac{3e^{-12s}}{2s(s^2+5)} - \frac{5e^{-4s}}{2(s^2+5)}$$

$$\frac{1}{s(s^2+5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+5} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{5} \\ B = -\frac{1}{5} \\ C = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+5)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{5s} - \frac{1}{5(s^2+5)}\right)$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{5\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}\,t$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-s}{2(s^2+5)}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+5}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3e^{-12s}}{2s(s^2+5)}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5e^{-4s}}{2(s^2+5)}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\cos\sqrt{5}t - \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t + \frac{3}{2}u_{12}(t)\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5\sqrt{5}}\sin(\sqrt{5}(t-12))\right)$$

$$-\frac{5}{2}u_4(t)\left(\cos(\sqrt{5}(t-4))\right)$$

۳- الف) $F(s)=\ln\left(\frac{s}{s-1}\right)$ قرار می‌دهیم

$$F(s) = \ln s - \ln(s-1) \Rightarrow F'(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}$$

$$\Rightarrow L^{-1}(F'(s)) = 1 - e^{t} \Rightarrow L^{-1}(F(s)) = -\frac{1}{t}(1-e^{t})$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left(e^{-2s}\ln\left(\frac{s}{s-1}\right)\right) = u_2(t)\left(-\frac{1}{t-2}(1-e^{t-2})\right)$$

۳- ب)

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0<t<\frac{\pi}{2} \\ \sin t & \frac{\pi}{2}<t<\pi \\ 0 & t>\pi \end{cases}$$

$$f(t) = 1 + u_{\frac{\pi}{2}}(t)(\sin t - 1) + (0 - \sin t)u_{\pi}(t)$$

$$= 1 + u_{\frac{\pi}{2}}(t)\sin t - u_{\frac{\pi}{2}}(t) - u_{\pi}(t)\sin t$$

$$\Rightarrow L(f(t)) = \frac{1}{s} + e^{-\frac{\pi}{2}s}L(\underbrace{\sin(t+\tfrac{\pi}{2})}_{\cos t}) - \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s} - e^{-\pi s}L(\overbrace{\sin(t+\pi)}^{-\sin t})$$

$$= \frac{1}{s} + e^{-\frac{\pi}{2}s} \times \frac{s}{s^2+1} - \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t e^{2t} \\ t e^{-2t} \end{bmatrix}$$

-۴

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x - y + te^{2t} \\ y' = -3x - y + te^{-2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (D-1)x + y = te^{2t} \\ 3 + (D+1)y = te^{-2t} \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} te^{2t} & 1 \\ te^{-2t} & D+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-1 & 1 \\ 3 & D+1 \end{vmatrix}} = \frac{(D+1)(te^{2t}) - te^{-2t}}{D^2-1-3}$$

$$= \frac{e^{2t} + 2te^{2t} + te^{2t} - te^{-2t}}{D^2-4} \Rightarrow (D^2-4)x = e^{2t} + 3te^{2t} - te^{-2t}$$

ابتدا معادله همگن را حل می کنیم:

$$r^2 - 4 = 0 \rightarrow r = \pm 2 \Rightarrow x_h = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t}$$

حال جواب خصوصی این معادله را می‌یابیم:

$$x_p = t e^{2t}(A) + t e^{2t}(Bt+C) + t e^{-2t}(Et+F)$$

$$\Rightarrow x = x_h + x_p = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t} + Ate^{2t} + te^{2t}(Bt+C) + te^{-2t}(Et+F) \qquad \mathrm{I}$$

$$\Rightarrow x' = -2c_1 e^{-2t} + 2c_2 e^{2t} + Ae^{2t} + 2Ate^{2t} + (e^{2t}+2te^{2t})(Bt+C) + Bte^{2t} + (e^{-2t}-2te^{-2t})(Et+F) + Ete^{-2t} \qquad \mathrm{II}$$

$$\xrightarrow{\text{از معادله اول}} y = x - x' + te^{2t} = \mathrm{I} - \mathrm{II} + te^{2t}$$